Составил: ст. преп. Мартынова Т.Е.,
компьютерная вёрстка: ст. преп. Мартынова Т.Е.

МАТЕМАТИКА 1

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену.

1. Полностью правила дифференцирования и таблица производных.

Правила дифференцирования

1) $C' = 0$;
2) $x' = 1$;
3) $(U \pm V)' = U' \pm V'$;
4) $(CU)' = C \cdot U'$;
5) $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$;
6) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$, $V \neq 0$.

Здесь C − константа, U и V − дифференцируемые функции переменной x.

Таблица производных

1) $(U^a)' = a \cdot U^{a-1} \cdot U'$;
2) $(e^U)' = e^U \cdot U'$;
3) $(a^U)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$, $(a > 0, a \neq 1)$;
4) $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$;
5) $(\log_a U)' = \dfrac{U'}{U \cdot \ln a}$, $(a > 0, a \neq 1)$;
6) $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$;
7) $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$;
8) $(\mathrm{tg} U)' = \dfrac{U'}{\cos^2 U}$;
9) $(\mathrm{ctg} U)' = -\dfrac{U'}{\sin^2 U}$;
10) $(\arcsin U)' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$;
11) $(\arccos U)' = -\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$;
12) $(\mathrm{arctg} U)' = \dfrac{U'}{1+U^2}$;
13) $(\mathrm{arcctg} U)' = -\dfrac{U'}{1+U^2}$;
14) $(U^V)' = U^V \left(V' \cdot \ln U + V \cdot \dfrac{U'}{U}\right)$.

Здесь a − число, U и V − дифференцируемые функции переменной x.

2. Определение предела функции.

а) на "языке $\varepsilon - \delta$ (эпсилон-дельта)":

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тогда пишут $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

б) на "языке последовательностей":

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой сходящейся к числу x_0 последовательности значений аргумента x

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

(входящих в область определения функции и отличных от x_0), соответствующая последовательность значений функции y

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$$

сходится к числу A, т.е. $A = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

3. Определение производной.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется ***производной функции*** $y = f(x)$ в точке x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x, при этом она обязательно непрерывна в этой точке.

Геометрически величина производной $f'(x)$ представляет собой *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке x.

4. Уравнение касательной.

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

5. Таблица эквивалентных пар.

1) $\sin U \underset{U\to 0}{\sim} U$;
2) $\mathrm{tg}\,U \underset{U\to 0}{\sim} U$;
3) $\arcsin U \underset{U\to 0}{\sim} U$;
4) $\mathrm{arctg}\,U \underset{U\to 0}{\sim} U$; ;
5) $1-\cos U \underset{U\to 0}{\sim} \dfrac{U^2}{2}$;
6) $e^U - 1 \underset{U\to 0}{\sim} U$;
7) $a^U - 1 \underset{U\to 0}{\sim} U\ln a$;
8) $\ln(1+U) \underset{U\to 0}{\sim} U$;
9) $(1+U)^\mu - 1 \underset{U\to 0}{\sim} \mu U$;
10) $U^V \underset{\substack{U\to 1\\ V\to\infty}}{\sim} e^{V(U-1)}$.

Здесь a, μ − числа, U и V − функции переменной x.

6. Формула для вычисления первой производной параметрической функции.

Если система уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $x(t), y(t)$ − дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, определяет y как однозначную непрерывную функцию от x, то производная y'_x существует и равна $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

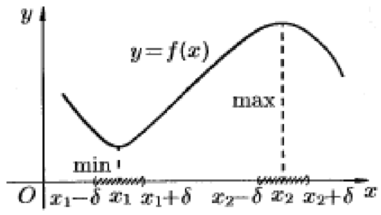
7. Необходимые условия возрастания (убывания) дифференцируемой функции.

Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех x из $(a;b)$.

8. Определение максимума (минимума).

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

На нижеприведенном рисунке x_1 − точка минимума, x_2 − точка максимума.



Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом (минимумом)*** функции.

Максимум (минимум) функции называется ***экстремумом*** функции. Функция может иметь экстремум только во внутренних точках области определения, поскольку δ-окрестность точки максимума (минимума) должна принадлежать области определения функции.

9. Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

10. Необходимые условия выпуклости вверх (вниз) дифференцируемой функции.

Если кривая $y = f(x)$ в интервале $(a;b)$ выпукла вверх (вниз), то вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна) во всех точках интервала, т.е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), кроме, может быть, отдельных точек, в которых она равна нулю.

11. Формула Тейлора для функции с остаточным членом в форме Пеано.

Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки справедлива ***формула Тейлора***:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ − остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

Запись $o((x-x_0)^n)$ означает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки x_0 ее многочленом Тейлора *n*-ой степени, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x \to x_0$ бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$.